DECSAI
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada

# Operaciones con conjuntos difusos

© Fernando Berzal, berzal@acm.org

## Operaciones con subconjuntos difusos

- Operaciones unarias
  - Normalización
  - Concentración
  - Dilatación
  - Intensificación del contraste
  - Difuminación
- Relaciones entre conjuntos difusos
  - Igualdad
  - Inclusión
  - Operaciones conjuntistas: unión, intersección, negación
- Normas y conormas triangulares
  - t-normas
  - t-conormas (a.k.a. s-normas)
- Funciones de negación

# Operaciones unarias

**Normalización [normalization]**

Convierte un conjunto difuso no normalizado (a.k.a. "subnormal") en uno normalizado.

$$norm_A(X) = A(X) \,/\, altura(A)$$



# Operaciones unarias

**Concentración [concentration]**

La función de pertenencia toma valores más pequeños, concentrándose en los valores mayores:

$$con_A(X) = A^p(X), \text{ con } p>1$$

(normalmente, p=2)

# Operaciones unarias

**Dilatación [dilation]**

Efecto contrario a la concentración, dos alternativas:

$$dil_A(X) = A^{1/p}(X), \text{ con } p>1$$
(normalmente, p=2)

$$dil_A(X) = A^p(X), \text{ con } p\in(0,1)$$
(normalmente, p=1/2)

Alternativa:

$$dil_A(X) = 2A(x) - A^2(X)$$



# Operaciones unarias

**Intensificación del contraste**
**[contrast intensification]**

Disminuyen los valores menores que 1/2,
se aumentan los valores mayores:

$$int_A(X) = 2^{p-1} A^p(X) \text{ cuando } A(X) \leq 0.5$$
$$int_A(X) = 1 - 2^{p-1} (1-A(X))^p \text{ en otro caso}$$

# Operaciones unarias

**Difuminación [fuzzification]**

Operador contrario a la intensificación del contraste:

$$\mathrm{fuzzy}_A(X) = \mathrm{sqrt}(A(X)/2) \text{ cuando } A(X) \leq 0.5$$
$$\mathrm{fuzzy}_A(X) = 1 - \mathrm{sqrt}((1\text{-}A(X)/2) \text{ en otro caso}$$



# Relaciones entre conjuntos

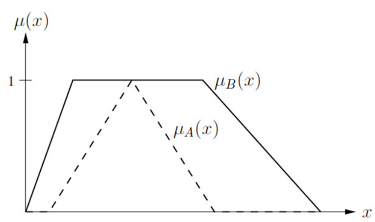
**Igualdad [equality]**

Dos conjuntos difusos definidos en el mismo universo son iguales si tienen la misma función de pertenencia

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A(x) = B(x),\ \forall x \in X$$

**Inclusión [inclusion]**

Un conjunto difuso está incluido en otro si su función de pertenencia toma siempre valores más pequeños:




$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A(x) \leq B(x),\ \forall x \in X$$

# Relaciones entre conjuntos

**Inclusión difusa [fuzzy inclusion]**

Si el universo es finito, podemos relajar la condición de inclusión para medir el grado en el que un conjunto difuso está incluido en otro (Kosko, 1992):

$$S(A,B) = \frac{1}{card(A)}\left(card(A) - \sum_{x \in X} max\{0, A(x) - B(x)\}\right)$$

El cardinal, en el sentido de Zadeh, como suma de los grados de pertenencia:

$$card(A) = \sum_{x \in X} A(x)$$



# Relaciones entre conjuntos

**Inclusión difusa [fuzzy inclusion]**

EJEMPLO

A = 0.2/1+ 0.3/2+ 0.8/3+ 1/4 + 0.8/5 card(A) = 3.1

B = 0.2/2+ 0.3/3+ 0.8/4+ 1/5 + 0.1/6 card(B) = 2.4

S(A,B) = 1/3.1 (3.1 – (0.2+0.1+0.5+0.2+0+0) )
= 2.1 / 3.1 = 0.68

S(B,A) = 1/2.4 (2.4 – (0+0+0+0+0.2+0.1) )
= 2.1 / 2.4 = 0.88

B está más incluido en A que A en B

# Relaciones entre conjuntos

**Operaciones conjuntistas**

- **Unión**

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x) = \max\{A(x), B(x)\}$$

- **Intersección**

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = \min\{A(x), B(x)\}$$

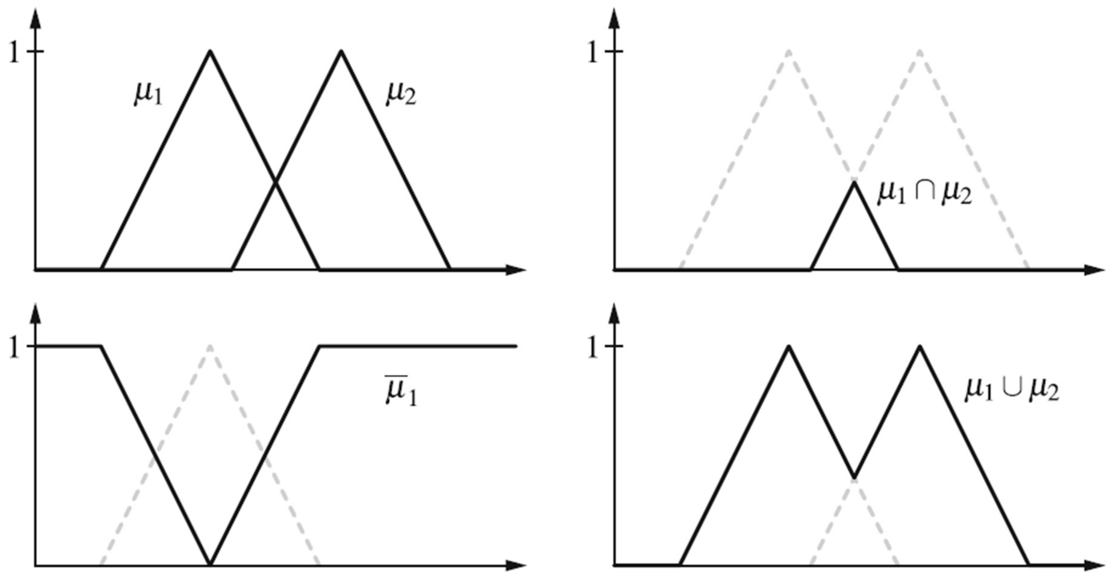
- **Negación**

$$\overline{A}(x) = \neg A(x) = 1 - A(x)$$



# Relaciones entre conjuntos

**Operaciones conjuntistas**



# Relaciones entre conjuntos

**Operaciones conjuntistas**

PROPIEDADES BÁSICAS

- Idempotencia

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

- Conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- Asociativa

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$



# Relaciones entre conjuntos

**Operaciones conjuntistas**

PROPIEDADES BÁSICAS

- Distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Involución (doble negación)

$$\neg(\neg A) = A$$

- Condiciones frontera o límite

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cup X = X$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cap X = A$$

# Relaciones entre conjuntos

**Operaciones conjuntistas**

PROPIEDADES BÁSICAS

- Leyes de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

- Propiedad transitiva

$A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ implica $A \subseteq C$



# Normas y conormas triangulares

- Establecen modelos genéricos para las operaciones de unión e intersección.

- Deben cumplir ciertas propiedades básicas:
  - Conmutativa
  - Asociativa
  - Monotonicidad
  - Condiciones frontera

# Normas y conormas triangulares

**Norma triangular, t-norma**

Operación binaria t: $[0,1]^2 \to [0,1]$
que cumple las siguientes propiedades:

- Conmutativa:

$$x \; t \; y = y \; t \; x$$

- Asociativa:

$$x \; t \; y \; t \; z = x \; t \; (y \; t \; z) = (x \; t \; y) \; t \; z$$

- Monotonicidad:

Si $x \leq y$ y $w \leq z$, entonces $x \; t \; w \leq y \; t \; z$

- Condiciones frontera:

$$x \; t \; 0 = 0 \qquad x \; t \; 1 = x$$



# Normas y conormas triangulares

**Conorma triangular, t-conorma o s-norma**

Operación binaria s: $[0,1]^2 \to [0,1]$
que cumple las siguientes propiedades:

- Conmutativa:

$$x \; s \; y = y \; s \; x$$

- Asociativa:

$$x \; s \; y \; s \; z = x \; s \; (y \; s \; z) = (x \; s \; y) \; s \; z$$

- Monotonicidad:

Si $x \leq y$ y $w \leq z$, entonces $x \; s \; w \leq y \; s \; z$

- Condiciones frontera:

$$x \; s \; 0 = x \qquad x \; s \; 1 = 1$$

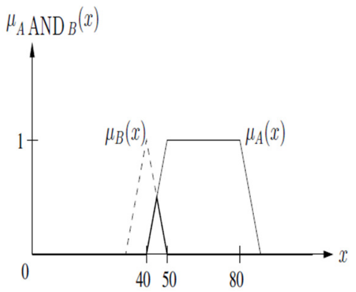
# Normas y conormas triangulares

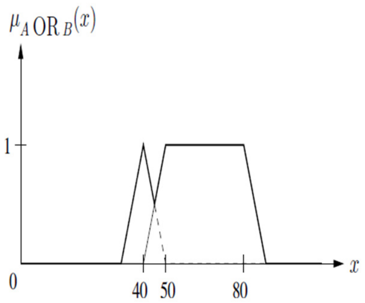
**t-norma del mínimo ($\wedge$)**

La función mínimo es una t-norma, extensión natural de la intersección en conjuntos difusos.

**t-conorma del máximo ($\vee$)**

La función máximo es una t-conorma, extensión natural de la unión en conjuntos difusos.

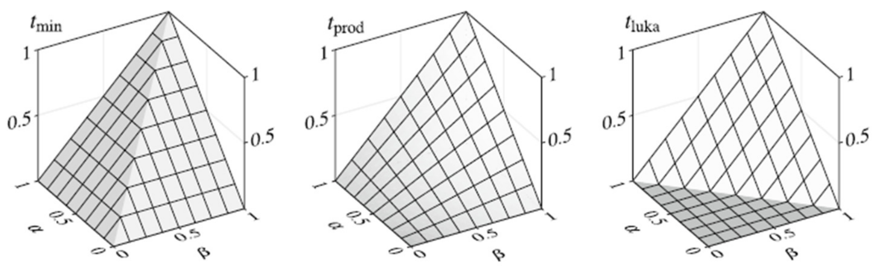





# Normas y conormas triangulares

**Otras t-normas**




- **Producto**

$$t(x, y) = x \cdot y$$

- **t-norma de Lukasiewicz**

$$t(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$$

# Normas y conormas triangulares

**Otras t-normas**

- **Producto drástico**

$$t(x,y) = \begin{cases} x & si\ y = 1 \\ y & si\ x = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

- **Producto acotado**

$$t(x,y) = \max\{0, (1+p)(x+y-1) - pxy\}, p \geq -1$$
$$t(x,y) = \sqrt[p]{\max\{0, x^p + y^p - 1\}}, p > 0$$

- **Producto de Hamacher**

$$t(x,y) = \frac{xy}{p + (1-p)(x+y-xy)}, p \geq 0$$



# Normas y conormas triangulares

**Otras t-normas**

- **Familia Yager**

$$t(x,y) = 1 - min\left\{1, \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p}\right\}, p > 0$$

- **Familia Dubois-Prade**

$$t(x,y) = \frac{xy}{\max\{x,y,p\}}, p \in [0,1]$$

- **Familia Frank**

$$t(x,y) = log_p\left(1 + \frac{(p^x - 1)(p^y - 1)}{p - 1}\right) \quad , p > 0, p \neq -1$$

# Normas y conormas triangulares

## Otras t-normas

- **Producto de Einstein**

$$t(x,y) = \frac{xy}{1 + (1 - \mathrm{x}) + (1 - \mathrm{y})}$$

- **Más…**

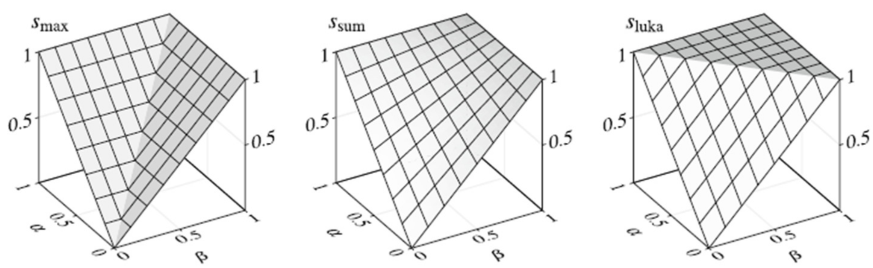
$$t(x,y) = \frac{1}{1 + \sqrt[p]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^p + \left(\frac{1-y}{y}\right)^p}}, p > 0$$

$$t(x,y) = \frac{1}{\sqrt[p]{\frac{1}{x^p} + \frac{1}{y^p} - 1}}, p > 0$$



# Normas y conormas triangulares

## Otras t-conormas (s-normas)




- **Suma (dual de la t-norma del producto)**

$$s(x,y) = x + y - x \cdot y$$

- **t-conorma de Lukasiewicz**

$$s(x,y) = \min\{x + y, 1\}$$

# Normas y conormas triangulares

**Otras t-conormas (s-normas)**

- **Suma drástica**

$$s(x,y) = \begin{cases} y & si\ x = 0 \\ x & si\ y = 0 \\ 1 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

- **Suma acotada**

$$s(x,y) = \min\{1, x + y + pxy\}, p \geq 0$$

- **Familia Sugeno**

$$s(x,y) = \min\{1, x + y + p\ - xy\}, p \geq 0$$



# Normas y conormas triangulares

**Otras t-conormas (s-normas)**

- **Familia Yager**

$$s(x,y) = min\{1, \sqrt[p]{x^p + y^p}\}, p > 0$$

- **Familia Dubois-Prade**

$$s(x,y) = 1 - \frac{(1-x)(1-y)}{\max\{1-x, 1-y, p\}}, p \in [0,1]$$

- **Familia Frank**

$$s(x,y) = log_p\left(1 + \frac{(p^{1-x}-1)(p^{1-y}-1)}{p-1}\right) \quad , p > 0, p \neq -1$$

# Normas y conormas triangulares

**Propiedades: Norma dual o conjugada**

Para cada t-norma existe una s-norma dual o conjugada (y viceversa)

$$s(x, y) = 1 - t(1 - x, 1 - y)$$
$$t(x, y) = 1 - s(1 - x, 1 - y)$$

Propiedad equivalente a las leyes de De Morgan de la teoría de conjuntos difusos (en conjuntos crisp se aplican a la unión y a la intersección):

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$$
$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$



# Normas y conormas triangulares

**Propiedades: Ordenación**

t-normas y s-normas no pueden ordenarse

No obstante, se pueden identificar
las mayores y menores t-normas y s-normas posibles:

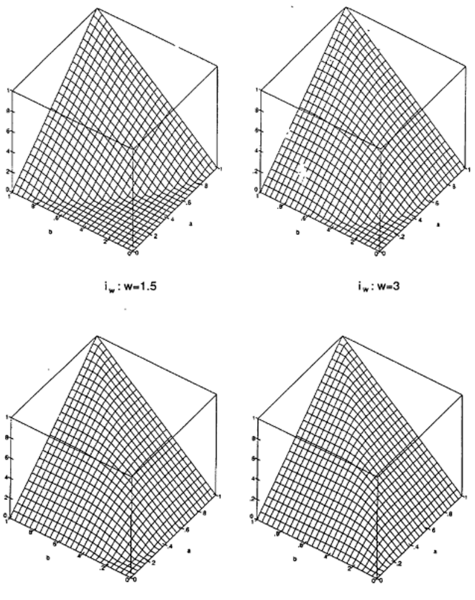
- Mayor t-norma: Función mínimo
- Menor t-norma: Producto drástico

- Mayor t-conorma (s-norma): Suma drástica
- Menor t-conorma (s-norma): Función máximo

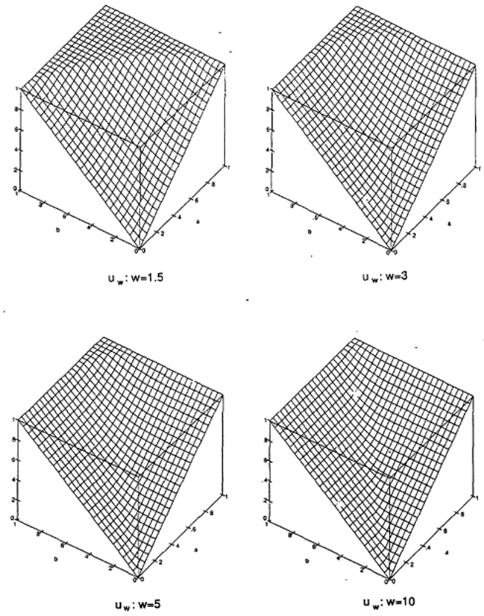
# Normas y conormas triangulares

## Propiedades: Ordenación

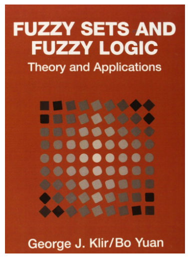
Algunas familias cubren el espectro completo, p.ej. Yager




t-normas de Yager




t-conormas de Yager

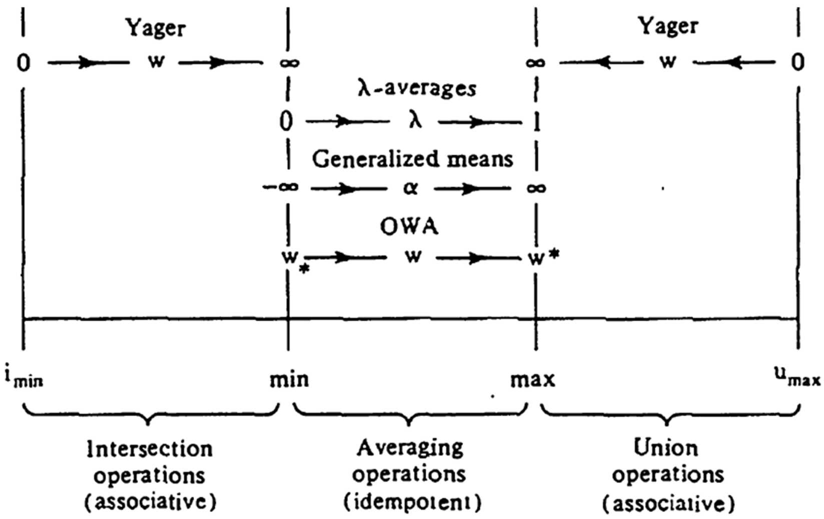


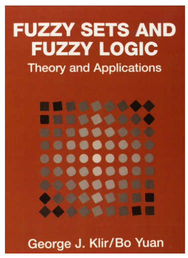



# Normas y conormas triangulares

## Propiedades: Ordenación

- t-normas y t-conormas corresponden a las operaciones difusas de intersección y unión.
- También existen otras operaciones de agregación intermedias (p.ej. OWA [ordered weighted averaging]).



# Normas y conormas triangulares

**Propiedades: Normas arquimedianas**

- **t-norma arquimediana:**

Si la t-norma es continua y subidempotente
$x\ t\ x < x, \forall x \in (0,1)$

- **s-norma arquimediana:**

Si la s-norma es continua y superidempotente
$x\ s\ x > x, \forall x \in (0,1)$



# Normas y conormas triangulares

**Propiedades: Normas arquimedianas**

- **t-norma arquimediana:**
Se puede describir por una función continua y estrictamente decreciente $f: [0,1] \rightarrow [0, \infty)$ con $f(1)=0$.

- **s-norma arquimediana:**
Se puede describir por una función continua y estrictamente creciente $g: [0,1] \rightarrow [0, \infty)$ con $g(0)=0$.

# Normas y conormas triangulares

## Propiedades: Normas arquimedianas

- **t-norma arquimediana:**
  $t(a,b) = f^{(-1)}(\ f(a) + f(b)\ )$

  EJEMPLO: $f(x)=(1-x)^p$ da lugar a las t-normas de Yager.

- **s-norma arquimediana:**
  $s(a,b) = g^{(-1)}(\ g(a) + g(b)\ )$

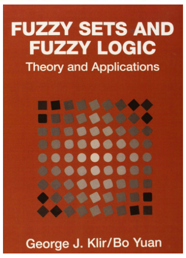
  EJEMPLO: $g(x)=x^p$ da lugar a las t-conormas de Yager.



# Normas y conormas triangulares

TABLE 3.2 SOME CLASSES OF FUZZY INTERSECTIONS ($t$-NORMS)

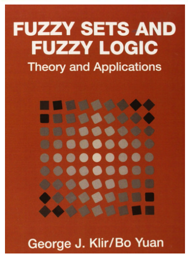
| Reference | Formula $i(a,b)$ | Decreasing generator $f(a)$ | Parameter range |
|---|---|---|---|
| Dombi [1982] | $\left\{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{b}-1\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\right\}^{-1}$ | $\left(\frac{1}{a}-1\right)^{\lambda}$ | $\lambda > 0$ |
| Frank [1979] | $\log_s\left[1+\frac{(s^a-1)(s^b-1)}{s-1}\right]$ | $-\ln\left(\frac{s^a-1}{s-1}\right)$ | $s > 0, s \neq 1$ |
| Hamacher [1978] | $\frac{ab}{r+(1-r)(a+b-ab)}$ | $-\ln\left(\frac{a}{r+(1-r)a}\right)$ | $r > 0$ |
| Schweizer & Sklar 1 [1963] | $\{\max(0, a^p+b^p-1)\}^{\frac{1}{p}}$ | $1-a^p$ | $p \neq 0$ |
| Schweizer & Sklar 2 | $1-[(1-a)^p+(1-b)^p - (1-a)^p(1-b)^p]^{\frac{1}{p}}$ | $\ln[1-(1-a)^p]^{\frac{1}{p}}$ | $p > 0$ |
| Schweizer & Sklar 3 | $\exp(-(\lvert\ln a\rvert^p+\lvert\ln b\rvert^p)^{\frac{1}{p}})$ | $\lvert\ln a\rvert^p$ | $p > 0$ |
| Schweizer & Sklar 4 | $\frac{ab}{[a^p+b^p-a^pb^p]^{\frac{1}{p}}}$ | $a^{-p}-1$ | $p > 0$ |
| Yager [1980f] | $1-\min\left\{1, [(1-a)^w+(1-b)^w]^{\frac{1}{w}}\right\}$ | $(1-a)^w$ | $w > 0$ |
| Dubois & Prade [1980] | $\frac{ab}{\max(a,b,\alpha)}$ | | $\alpha \in [0,1]$ |
| Weber [1983] | $\max\left(0, \frac{a+b+\lambda ab-1}{1+\lambda}\right)$ | $\frac{1}{\lambda}\ln[1+\lambda(1-a)]$ | $\lambda > -1$ |
| Yu [1985] | $\max[0, (1+\lambda)(a+b-1)-\lambda ab]$ | $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1+\lambda}{1+\lambda a}$ | $\lambda > -1$ |



# Normas y conormas triangulares

TABLE 3.3 SOME CLASSES OF FUZZY UNIONS ($t$-CONORMS)

| Reference | Formula $u(a,b)$ | Increasing generator $g(a)$ | Parameter range |
|---|---|---|---|
| Dombi [1982] | $\left\{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{b}-1\right)^{\lambda}\right]^{-\frac{1}{\lambda}}\right\}^{-1}$ | $\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}$ | $\lambda > 0$ |
| Frank [1979] | $1-\log_s\left[1+\frac{(s^{1-a}-1)(s^{1-b}-1)}{s-1}\right]$ | $-\ln\left(\frac{s^{1-a}-1}{s-1}\right)$ | $s > 0, s \neq 1$ |
| Hamacher [1978] | $\frac{a+b+(r-2)ab}{r+(r-1)ab}$ | $-\ln\left(\frac{1-a}{r+(1-r)(1-a)}\right)$ | $r > 0$ |
| Schweizer & Sklar 1 [1963] | $1-\{\max(0,(1-a)^p+(1-b)^p-1)\}^{\frac{1}{p}}$ | $1-(1-a)^p$ | $p \neq 0$ |
| Schweizer & Sklar 2 | $[a^p+b^p-a^pb^p]^{\frac{1}{p}}$ | $\ln[1-a^p]^{\frac{1}{p}}$ | $p > 0$ |
| Schweizer & Sklar 3 | $1-\exp(-(\lvert\ln(1-a)\rvert^p+\lvert\ln(1-b)\rvert^p)^{\frac{1}{p}})$ | $\lvert\ln(1-a)\rvert^p$ | $p > 0$ |
| Schweizer & Sklar 4 | $1-\frac{(1-a)(1-b)}{[(1-a)^p+(1-b)^p-(1-a)^p(1-b)^p]^{\frac{1}{p}}}$ | $(1-a)^{-p}-1$ | $p > 0$ |
| Yager [1980f] | $\min\left[1,(a^w+b^w)^{\frac{1}{w}}\right]$ | $a^w$ | $w > 0$ |
| Dubois & Prade [1980] | $1-\frac{(1-a)(1-b)}{\max((1-a),(1-b),\alpha)}$ | | $\alpha \in [0,1]$ |
| Weber [1983] | $\min\left(1,a+b-\frac{\lambda}{1-\lambda}ab\right)$ | $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1+\lambda}{1+\lambda(1-a)}$ | $\lambda > -1$ |
| Yu [1985] | $\min(1,a+b+\lambda ab)$ | $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda a)$ | $\lambda > -1$ |






# Funciones de negación

Generalizan el complemento o negación de un conjunto difuso:

Operaciones unarias N: [0,1] → [0,1] que cumplen las siguientes propiedades:

- Monotonía: N es no creciente.
- Condiciones frontera: N(0)=1, N(1)=0.

Pueden añadirse otras propiedades si es necesario:

- Continuidad: N es una función continua.
- Involución: N(N(x))=x, para x∈[0,1]

# Funciones de negación

EJEMPLOS

Funciones de negación no involutivas

- **Función umbral**

$$N(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < t \\ 0 & si\ x \geq t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

- **Negación "drástica"**

$$N(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x > 0 \end{cases}$$



# Funciones de negación

EJEMPLOS

Funciones de negación involutivas

- **Familia Sugeno**

$$N(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x} \qquad \lambda \in (-1,\infty)$$

- **Familia Yager**

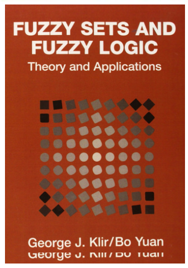
$$N(x) = \sqrt[w]{1-x^w} \qquad w \in (0,\infty)$$

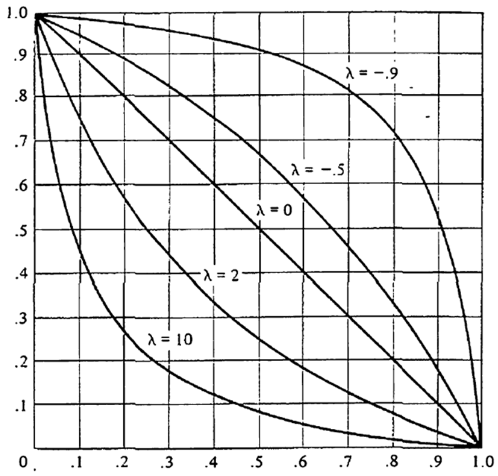
Con $\lambda$=0 o w=1,
obtenemos la función de negación original N(x) = 1 – x

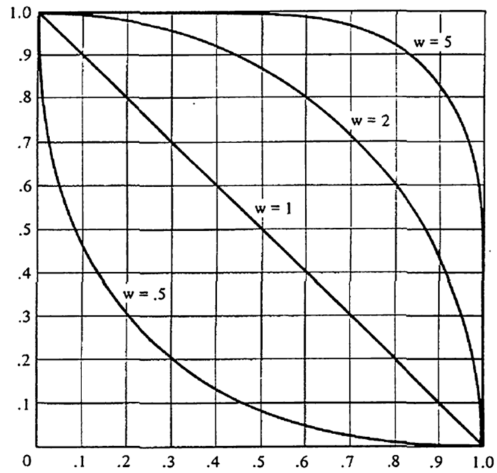
# Funciones de negación

EJEMPLOS

Funciones de negación involutivas




Sugeno

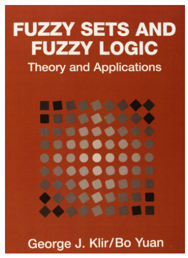
Yager



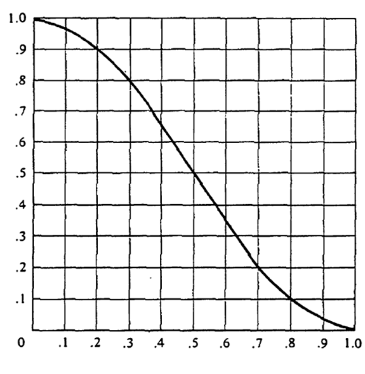
# Funciones de negación

EJEMPLOS

Función continua pero no involutiva




$$N(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi x)$$



# Sistema formal
## de operaciones lógicas

Sistema **(t,s,N)** formado por
una t-norma, una s-norma y una negación N,
donde
la t-norma y la s-norma son duales con respecto a N:

$$x \text{ s } y = N(N(x) \text{ t } N(y))$$
$$x \text{ t } y = N(N(x) \text{ s } N(y))$$

EJEMPLO (el más empleado)

- **t(x,y) = min{x,y}**
- **s(x,y) = max{x,y}**
- **N(x) = 1 - x**



# Sistema formal
## de operaciones lógicas

**t-normas y t-conormas duales**

… con respecto al complemento estándar (1-x):

| t-norma | t-conorma |
|---|---|
| min{x,y} | max{x,y} |
| x·y | x+y-x·y |
| max{0,x+y-1} | min{1,x+y} |
| producto drástico | suma drástica |
| t-normas de F | t-conormas de F |

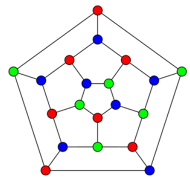
… con respecto al complemento de Sugeno:

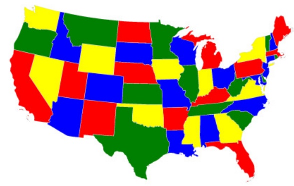
| t-norma | t-conorma |
|---|---|
| min{x,y} | max{x,y} |
| producto x·y | t-conorma de Hamacher |
| t-norma de Weber | t-conorma de Yu |

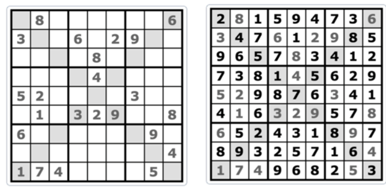
## Caso práctico
# Satisfacción de restricciones

Muchos problemas prácticos se pueden plantear como problemas de satisfacción de restricciones (en inglés, CSP [Constraint Satisfaction Problems]).

EJEMPLOS
Coloreado de grafos, sudokus, confección de horarios…







Si podemos relajar las restricciones, podemos usar directamente operaciones difusas sobre conjuntos



## Caso práctico
# Satisfacción de restricciones

EJEMPLO: HORARIO DEL MÁSTER

Tenemos varios "stakeholders" con intereses y preferencias particulares…

- La Universidad, interesada en captar estudiantes y mantener su reputación.
- Los estudiantes, muchos de ellos compaginando un trabajo con sus estudios.
- Los profesores, que tienen que cumplir con otras obligaciones (personales y profesionales).

# Caso práctico
# Satisfacción de restricciones

EJEMPLO: HORARIO DEL MÁSTER

Definimos algunos conjuntos difusos…

| Hora | Temprano | Por la mañana | A mediodía | Por la tarde | A última hora |
|---|---|---|---|---|---|
| 08-10 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 10-12 | 0.25 | 1.0 | 0.25 | 0.0 | 0.0 |
| 12-14 | 0.0 | 0.75 | 0.75 | 0.0 | 0.0 |
| 14-16 | 0.0 | 0.25 | 1.0 | 0.50 | 0.0 |
| 16-18 | 0.0 | 0.0 | 0.25 | 1.0 | 0.0 |
| 18-20 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.25 |
| 20-22 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 |

| Día | L | M | X | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Finde | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.50 | 1.0 | 1.0 |



# Caso práctico
# Satisfacción de restricciones

EJEMPLO: HORARIO DEL MÁSTER

Preferencias de la Universidad…

| Hora | L | M | X | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 08-10 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.50 | 0.50 |
| 10-12 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.50 | 0.50 |
| 12-14 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.50 | 0.50 |
| 14-16 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.50 | 0.50 |
| 16-18 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.50 | 0.50 |
| 18-20 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.50 | 0.50 |
| 20-22 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.50 | 0.50 |

Con cierto margen para tareas de limpieza y mantenimiento entre turnos (a mediodía) y preferiblemente no en fin de semana (por "ahorrar").

Caso práctico

# Satisfacción de restricciones

EJEMPLO: HORARIO DEL MÁSTER

Preferencias de los estudiantes…

| Hora | L | M | X | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 08-10 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 10-12 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 12-14 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 14-16 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 |
| 16-18 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.75 | 0.25 | 0.25 |
| 18-20 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.75 | 0.25 | 0.25 |
| 20-22 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.75 | 0.25 | 0.25 |

Preferiblemente por las tardes (para compaginar las clases con un trabajo por la mañana), no a la hora de comer y tampoco en fin de semana (para …).



Caso práctico

# Satisfacción de restricciones

EJEMPLO: HORARIO DEL MÁSTER

Preferencias de los profesores…

| Hora | L | M | X | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 08-10 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.25 | 0.25 |
| 10-12 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.75 | 0.25 | 0.25 |
| 12-14 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 0.75 | 0.25 | 0.25 |
| 14-16 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 |
| 16-18 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 18-20 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 20-22 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |

Ni a primera ni a última hora (por los motivos que sean) y tampoco en fin de semana (especialmente los viernes por la tarde). Por conciliación familiar (¡ejem! comodidad), también mejor por las mañanas…

Caso práctico

# Satisfacción de restricciones

## EJEMPLO: HORARIO DEL MÁSTER

Combinación de preferencias

| Hora | L | M | X | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 08-10 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 10-12 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 12-14 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 14-16 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 |
| 16-18 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 18-20 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |
| 20-22 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.25 | 0.25 |

Usando una t-norma (intersección difusa), obtenemos el horario del máster…



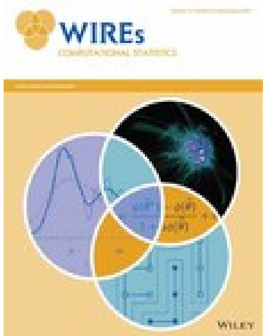
# Bibliografía

Miguel Delgado:
**Apuntes de Inteligencia Computacional**
Universidad de Granada, hasta el curso 2021/2022

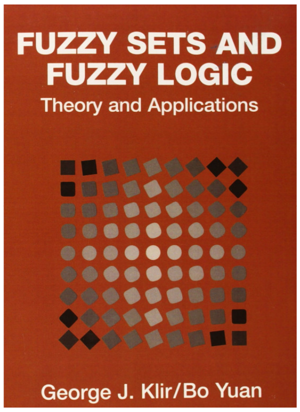

Sesiones grabadas en vídeo, curso 2020/2021:
https://elvex.ugr.es/decsai/computational-intelligence/video/fuzzy/

# Bibliografía recomendada

## Lógica Difusa




- Hans-Jürgen Zimmermann:
  **Fuzzy Set Theory**,
  WIREs Computational Statistics,
  John Wiley & Sons, 2:3, May/June 2010.
  DOI 10.1002/wics.82

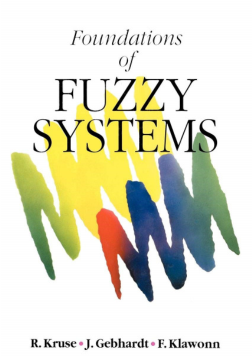



- George J. Klir & Bo Yuan:
  **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications**,
  1st edition, Prentice Hall, 1995.
  ISBN 0131011715

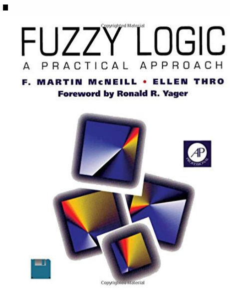


# Bibliografía complementaria

## Lógica y Sistemas Difusos



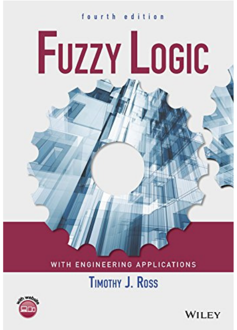

- Rudolf Kruse, Joan E. Gebhardt & Frank Klawonn:
  **Foundations of Fuzzy Systems**.
  John Wiley & Sons, 1994. ISBN 047194243X.
- Witold Pedrycz & Fernando Gomide:
  **An introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design**.
  MIT Press, 1998. ISBN 0262161710.




- Hans-Jürgen Zimmermann:
  **Fuzzy Set Theory and Its Applications**,
  Springer, 3rd edition, 1996. ISBN 0792396243
  Springer, 4th edition, 2001. ISBN 9401038708.
- F. Martin McNeill & Ellen Thro:
  **Fuzzy Logic: A Practical Approach**.
  Morgan Kaufmann, 1994. ISBN 0124859658.

# Bibliografía complementaria

## Lógica y Sistemas Difusos

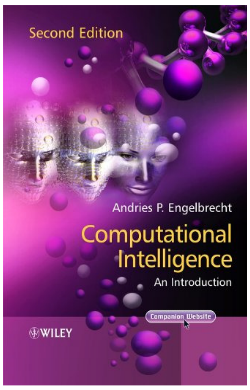


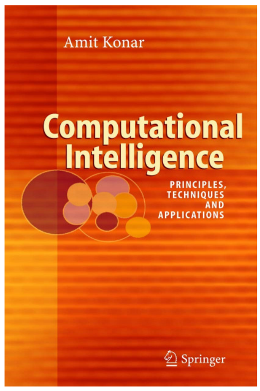

- Timothy J. Ross:
  **Fuzzy Logic with Engineering Applications**,
  4th edition, John Wiley & Sons, 2017. ISBN 1119235863.
- Lofti A. Zadeh: **Fuzzy Sets**.
  Information and Control, volume 8, issue 3, pp. 338-353, June 1965. DOI 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
- James C. Bezdek: **Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms**. Plenum Press, 1981. ISBN 0306406713.
- Bart Kosko: **Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence**. Prentice Hall, 1992. ISBN 0136114350
- Mohammad Jamshidi, Nader Vadiee & Timothy Ross (editors): **Fuzzy Logic and Control. Software and Hardware Applications**. Prentice Hall, 1993. ISBN 0133342514.



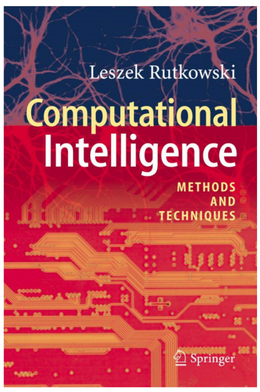
# Bibliografía complementaria

## Inteligencia Computacional




- Andries P. Engelbrecht:
  **Computational Intelligence.**
  **An Introduction**,
  $2^{nd}$ edition, John Wiley, 2007.
  ISBN 0470035617.
- Amit Konar:
  **Computational Intelligence.**
  **Principles, Techniques and Applications**,
  Springer Verlag, 2005.
  ISBN 3540208984.




- Leszek Rutkowski:
  **Computational Intelligence.**
  **Methods and Techniques**,
  Springer Verlag, 2008.
  ISBN 3540762876.

# Bibliografía complementaria

## Inteligencia Computacional

- James M. Keller, Derong Liu & David B. Fogel: **Fundamentals of Computational Intelligence: Neural Networks, Fuzzy Systems, and Evolutionary Computation**, Wiley - IEEE Press, 2016. ISBN 1119214343
- Rudolf Kruse, Christian Borgelt, Christian Braune, Sanaz Mostaghim, Matthias Steinbrecher, Frank Klawonn & Christian Moewes: **Computational Intelligence: A Methodological Introduction**. Springer, 2nd edition, 2016. ISBN 1447172949